Fen-Edebiyat Fakültesi	**FİNAL KAĞIDI**	
Ad Soyadı:	Bölümü: Matematik	NOTU
Numarası:	Dersin Adı: Analiz 3	
İmza:	Sınav Tarihi: 15 Ocak 2020	

Her soru 25 puandır. Yanlızca <u>dört</u> soruyu cevaplayın. Süre 80dk.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$ serisinin (A) $[0,\infty)$ üzerinde noktasal yakınsaklığını (B) $[0,\infty)$ üzerinde düzgün yakınsaklığını inceleyin.

Çözüm: $f_n(x) = \frac{x}{n(1+nx^2)}$.

$$f_n'(x) = \frac{n-n^2x^2}{n^2(1+nx^2)^2} = \begin{cases} >0, & 0<x<\frac{1}{\sqrt{n}} \\ =0, & x=\frac{1}{\sqrt{n}} \\ <0, & x>\frac{1}{\sqrt{n}} \end{cases}.$$

$f_n(x)$, $x = 1/\sqrt{n}$ noktasında maksimum değerini alır. Yani

$$\left|f_n(x)\right| = f_n(x) \le f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2n^{3/2}}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{3/2}}$ serisi yakınsak olduğundan, seri Weierstrass M-Testinden seri $[0,\infty)$ üzerinde düzgün yakınsak ve dolayısıyla noktasal yakınsak olur.

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n \left(\frac{2x+1}{x}\right)^n$ serisinin yakınsaklık aralığını belirleyin. Yakınsaklık aralığının varsa uç noktalarında da serinin yakınsaklığını inceleyin.

Çözüm: Kök testinden

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)\left|\frac{2x+1}{x}\right| = \left|\frac{2x+1}{2x}\right| \begin{cases} <1, & \text{ise seri yakınsak} \\ >1, & \text{ise seri ıraksak} \end{cases}$$

Seri

$$\left|\frac{2x+1}{2x}\right| < 1 \implies -1 < 1 + \frac{1}{2x} < 1 \implies -4 < \frac{1}{x} < 0 \implies x < -\frac{1}{4}$$

olunca yakınsar. Uç noktada

$$x = -\frac{1}{4} \implies \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n (-2)^n$$

serisi ıraksaktır. Zira

$$\lim_{n\to\infty} \left|\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n (-2)^n\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n\right| = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2n})^n} = \frac{1}{e^{1/2}} \neq 0$$

olduğundan n.terim testinden seri ıraksak çıkar. Seri $(-\infty, -1/4)$ aralığında yakınsar.

3. $f(x) = \dfrac{3+x}{2+3x-2x^2}$ fonksiyonunun (A) MacLaurin serisini bulun ve (B) serinin yakınsaklık aralığını belirleyin.

Çözüm: $\dfrac{3+x}{2+3x-2x^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(1-x/2)} + \dfrac{1}{1+2x} = \dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^{n+1}} + (-2)^n\right)x^n.$
Birinci seri $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$ iken ikinci seri $|-2x| < 1$ iken yakınsar. Her iki serinin ortak yakınsadığı aralık ise $|x| < \frac{1}{2}$ olur.

4. (A) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{(3-x)\sqrt{x^2+1}}$ ve (B) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^x}{x+e^x}dx$ integrallerinin yakınsak mı yoksa ıraksak mı olduğunu belirleyin.

Çözüm: Birinci integral $\displaystyle\lim_{x\to 3-}(3-x)\cdot\frac{1}{(3-x)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$ olduğundan ıraksar. İkinci integral

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{e^x}{x+e^x}}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x+e^x} = \frac{e^x}{e^x} = 1$$

olduğundan $\int_0^{\infty} 1\,dx = \infty$ integrali ile aynı karakterlidir. Yani ıraksaktır.

5. $f(x) = \begin{cases} x, & -\pi \le x \le 0 \\ 1-2x, & 0 < x \le \pi \end{cases}$ fonksiyonunun $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ şeklindeki Fourier serisinin (A) b_1 katsayısını hesaplayın. (B) Fourier serisinin noktasal limit fonksiyonunun grafiğini $[-2\pi, 2\pi]$ aralığında çizin. (C) Fourier serisi $[-\pi,\pi]$ üzerinde düzgün yakınsar mı?

Çözüm:

$$\int x\sin x\,dx = x(-\cos x) + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + c$$

olduğundan

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\sin x + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1-2x)\sin x\,dx = \frac{1}{\pi}(-x\cos x + \sin x)\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}(-\cos x + 2x\cos x - 2\sin x)\Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}(-\pi\cos(-\pi) - \cos\pi + 2\pi\cos\pi + \cos 0) = \frac{2}{\pi} - 1 \end{aligned}$$

Noktasal limit fonksiyonu uç noktalarda $f_{per}(-\pi) = f_{per}(\pi) = \frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2} = \frac{-\pi+1-2\pi}{2} = \frac{1-3\pi}{2}$ değerini alır. Fonksiyonunun süreksiz olduğu $x=0$ noktasında

$$f(0) = \frac{f(0-)+f(0+)}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

değerini alır.

$$f_{per}(x) = \begin{cases} \frac{1-3\pi}{2}, & x = -\pi \\ x, & -\pi < x < 0 \\ 1/2, & x = 0 \\ 1-2x, & 0 < x < \pi \\ \frac{1-3\pi}{2}, & x = \pi \end{cases}$$

Seri düzgün yakınsamaz. Zira noktasal limit fonksiyonu olan f_{per} süreksizdir.